ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**NGUYỄN THỊ ÁNH LY**

# THUẬT TOÁN SLICE CHO PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2016**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

NGUYỄN THỊ ÁNH LY

# THUẬT TOÁN SLICE CHO PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60. 46. 01. 04

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. NGUYỄN THỊ DUNG

THÁI NGUYÊN - 2016

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng luận văn này là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với các luận văn trước đây. Các thông tin, tài liệu trong luận văn đã được ghi rõ nguồn gốc.

*Thái Nguyên, ngày .... tháng .... năm 2016*

Học viên

**NGUYỄN THỊ ÁNH LY**

# Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Nguyễn Thị Dung, giảng viên Trường Đại học Nông Lâm- Đại học Thái Nguyên. Đầu tiên, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô. Trong suốt quá trình làm luận văn, cô đã dành nhiều thời gian và công sức để chỉ bảo hướng dẫn tôi từ những điều nhỏ nhặt nhất tới những vấn đề khó khăn cô vẫn luôn kiên nhẫn, tận tình quan tâm giúp đỡ tôi để hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập. Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập. Cuối cùng tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

*Thái Nguyên, ngày .... tháng .... năm 2016*

Học viên

**NGUYỄN THỊ ÁNH LY**

# Mục lục

# Mở đầu

Một trong những kết quả cơ bản trong Đại số giao hoán là định lý phân tích bất khả quy được chứng minh bởi Emmy Noether năm 1921. Trong bài báo đó Emmy Noether đã chứng minh rằng iđêan bất kì trong vành Noether có thể viết thành giao hữu hạn của các iđêan bất khả quy. Cho $A$ là một vành giao hoán có đơn vị và đặt $R = A[X_1, \ldots, X_d]$ là vành đa thức $d$ biến trên $A$. Một iđêan đơn thức *m-bất khả quy* theo một nghĩa nào đó là iđêan đơn thức nhỏ nhất, tức là nó không thể viết được thành giao không tầm thường của các iđêan đơn thức. Cho $J$ là một iđêan đơn thức của $R$, một phân tích *m-bất khả quy* của $J$ là biểu diễn $J = \cap_{i=1}^{n} J_i$ thành giao của các iđêan m-bất khả quy, phân tích này được gọi là *rút gọn* nếu $J_i \not\subseteq J_{i'}$ với mọi $i \neq i'$ và phân tích m-bất khả quy rút gọn là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các iđêan đơn thức trong phân tích. Chú ý rằng nếu $J \subsetneq R$ là iđêan đơn thức bất khả quy thì là nó luôn là iđêan m-bất khả quy và điều ngược lại cũng đúng nếu $A$ là miền nguyên.

Gần đây phân tích bất khả quy của iđêan đơn thức trở thành vấn đề tính toán cơ bản và được áp dụng trong nhiều lĩnh vực từ thuần túy toán học đến toán học ứng dụng và các lĩnh vực như sinh học, ... Một vài ví dụ của áp dụng phân tích bất khả quy của iđêan đơn thức là cát tuyến của các iđêan đơn thức và lũy thừa hình thức của iđêan đơn thức đưa ra bởi B. Sturmfels and S. Sullivant [8], vấn đề Frobenius đưa ra bởi B.H. Roune [7], kỹ thuật nghịch đảo của các mạng sinh học đưa ra bởi A.S Jarrah [3].

Mục đích của luận văn là giới thiệu về thuật toán Slice, một thuật toán dùng để tính phân tích bất khả quy của iđêan đơn thức, nghĩa là viết iđêan đơn thức đó thành giao rút gọn của các iđêan đơn thức bất khả quy. Các kết quả này được trình bày lại và chứng minh chi tiết một phần của bài báo *"The slice Algorithm for Irreducible Decomposition of Monomial ideals"* của tác giả B. Roune [6].

Cho $k$ là một trường và đặt $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, với $n \geqslant 2$ là vành đa thức $n$ biến lấy hệ số trên $k$, $I$ là iđêan đơn thức của $R$. Một đơn thức $m \in R$ được gọi là *đơn thức chuẩn cực đại* của $I$ nếu $m \notin I$ và $mx_i \in I$, với mọi $i = 1, \ldots, n$. Tập tất cả các đơn thức chuẩn cực đại của $I$ được ký hiệu là $\operatorname{msm}(I)$. Nếu biểu diễn $I$ bằng đồ thị thì mỗi đơn thức chuẩn cực đại của $I$ ứng với một điểm nằm ngoài $I$ nhưng nằm ở góc "gần nhất" so với phần đồ thị thuộc $I$.

Tập đơn thức chuẩn cực đại $\operatorname{msm}(I)$ đóng một vai trò quan trọng trong thuật toán Slice bởi ý tưởng cơ bản của thuật toán bắt nguồn từ một kết quả sau của Miller và Sturmfels [4]:

Chọn số nguyên $t$ sao cho $t$ lớn hơn bậc của mỗi đơn thức trong tập các đơn thức sinh rút gọn $\min(I)$ và định nghĩa $\phi(x^m) = (x_i^{m_i+1} \mid m_i + 1 < t)$. Khi đó, ánh xạ $\phi$ là một song ánh từ tập chuẩn cực đại $\operatorname{msm}(I + (x_1^t, \ldots, x_n^t))$ vào tập các iđêan đơn thức bất khả quy $\operatorname{irr}(I)$ của $I$.

Vì thế, bài toán tìm phân tích bất khả quy được quy về bài toán tìm tập đơn thức chuẩn cực đại. Thuật toán Slice cung cấp một công cụ để tính $\operatorname{msm}(I)$ bằng cách tách nó thành hai tập con gọi là *slice trong* và *slice ngoài*. Cả hai slice này đều phụ thuộc vào cách chọn một đơn thức gọi là *then chốt*. Các đơn thức của mỗi slice này lại được coi như tập chuẩn cực đại của các iđêan mới. Tiếp theo mỗi slice này lại được tách thành các slice đơn giản hơn và quá trình này tiếp tục cho đến khi tách thành những slice đủ đơn giản để có thể tính được tập các đơn thức chuẩn cực đại của chúng.

Cấu trúc của luận văn gồm hai chương. Chương 1 của luận văn dành để nhắc lại một số kiến thức về iđêan đơn thức: đồ thị, các phép toán giao, căn, chia và phân tích bất khả quy, phân tích tham số của iđêan đơn thức.

Chương 2 giới thiệu về thuật toán slice: mô tả thuật toán thông qua tập đơn thức chuẩn cực đại; chứng minh thuật toán dừng và đoạn giả mã để thực hiện thuật toán; mục 2 của chương 2 giới thiệu một số cải tiến cho phiên bản cơ sở của thuật toán.

Phần kết luận của luận văn tổng kết một số công việc đã thực hiện.

# Chương 1

# Iđêan đơn thức

Ký hiệu $A$ là một vành giao hoán có đơn vị và đặt $R = A[X_1, \ldots, X_d]$. Chương này dành để nhắc lại một số kiến thức về iđêan đơn thức: đồ thị, các phép toán, phân tích tham số của iđêan đơn thức. Các kết quả ở chương này được viết dựa theo [5].

## 1.1 Iđêan đơn thức và đồ thị của iđêan đơn thức

**Định nghĩa 1.1.1.** Một *iđêan đơn thức* trong $R$ là một iđêan của $R$ được sinh bởi các đơn thức theo các biến $X_1, \ldots, X_d$.

**Ví dụ 1.1.2.** Đặt $R = A[X,Y]$.

(i) Iđêan $I = (X^2, X^3Y, Y^3)R$ là một iđêan đơn thức.

(ii) Iđêan $J = (X^5 - Y^3, X^5)$ là một iđêan đơn thức vì $J = (X^5, Y^3)$.

(iii) Iđêan 0 và $R$ là các iđêan đơn thức vì $0 = (\emptyset)R$ và $R = 1_R R = X_1^0 \cdots X_d^0 R$.

Với mỗi iđêan đơn thức khác không $I \subseteq R$, ta ký hiệu $[[I]]$ là tập hợp tất cả các đơn thức chứa trong $I$. Khi đó tập hợp $[[I]] \subset R$ là một tập vô hạn nhưng không là iđêan. Theo định nghĩa, ta có $[[I]] = I \cap [[R]]$. Hơn nữa, với mỗi iđêan đơn thức $I \subseteq R$, ta có $I = ([[I]])R$.

**Mệnh đề 1.1.3.** *Cho $I$ và $J$ là hai iđêan đơn thức của $R$.*

*(i) $I \subseteq J$ nếu và chỉ nếu $[[I]] \subseteq [[J]]$.*

*(ii) $I = J$ nếu và chỉ nếu $[[I]] = [[J]]$.*

**Định nghĩa 1.1.4.** (i) Cho $f$ và $g$ là các đơn thức của $R$. Khi đó $f$ được gọi là *bội đơn thức* của $g$ nếu tồn tại một đơn thức $h \in R$ sao cho $f = gh$.

(ii) Với mỗi đơn thức $f = \underline{X}^{\underline{n}} = X_1^{n_1}\dots X_d^{n_d} \in R$, khi đó ta có bộ $d$-số tự nhiên $\underline{n} = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{N}^d$ được gọi là *véc tơ lũy thừa* của $f$.

Vì thế, có một sự tương ứng $1-1$ giữa các đơn thức trong $R$ với các véc tơ trong $\mathbb{N}^d$ và vì các đơn thức trong $R = A[X_1,\dots,X_d]$ là độc lập tuyến tính trong $A$ nên véctơ lũy thừa của mỗi đơn thức $f \in R$ là hoàn toàn xác định.

Cho d là một số nguyên dương. Giả sử trên $\mathbb{N}^d$ ta định nghĩa một quan hệ $\succcurlyeq$ như sau: $\underline{m} = (m_1,\dots,m_d) \succcurlyeq (n_1,\dots,n_d)$ nếu và chỉ nếu với mọi $i = 1,\dots,d$ ta có $m_i \geq n_i$ theo thứ tự thông thường trên $\mathbb{N}$. Khi đó nhờ vào tính độc lập tuyến tính của các đơn thức trong $R$, kết quả sau đây nói rằng tích của một đơn thức và một đa thức thì không là đơn thức (xem [5, Bổ đề 2.1.9]).

**Bổ đề 1.1.5.** *Cho $f = \underline{X}^{\underline{m}}$ và $g = \underline{X}^{\underline{n}}$ là các đơn thức trong $R$. Nếu $h$ là một đa thức trong $R$ sao cho $f = gh$ thì $\underline{m} \succcurlyeq \underline{n}$ và $h = \underline{X}^{\underline{p}}$ là đơn thức, trong đó $p_i = m_i - n_i$.*

**Ví dụ 1.1.6.** Đặt $R = A[X,Y]$. Cho $f = X^2Y$ và $g = X^3Y$, vì $m_1 = 2 < n_1 = 3$ nên theo Bổ đề 1.1.5 thì $f$ không là bội của $g$ nhưng ngược lại $g$ là một bội của $f$.

Cho $d$ là số nguyên dương, với mỗi $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt

$$[\underline{n}] = \{\underline{m} \in \mathbb{N}^d \mid m \succcurlyeq n\} = \underline{n} + \mathbb{N}^d.$$

Kết quả tiếp theo cho ta một tiêu chuẩn để kiểm tra xem khi nào thì một đơn thức $f$ thuộc iđêan sinh bởi đơn thức $g$. Đặc biệt là các điều kiện tương đương (i) và (iv) cho phép ta có thể kiểm tra bằng cách làm việc trên các véc tơ lũy thừa.

**Bổ đề 1.1.7.** *Cho $f = \underline{X}^{\underline{m}}$ và $g = \underline{X}^{\underline{n}}$ là các đơn thức trong $R$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

*(i) $f \in gR$.*

*(ii) $f$ là một bội của $g$.*

*(iii) $f$ là một bội đơn thức của $g$.*

*(iv) $\underline{m} \succcurlyeq \underline{n}$.*

*(v) $\underline{m} \in [\underline{n}]$.*

Vì ta có một song ánh giữa các đơn thức của $[[R]]$ và các bộ số thuộc $\mathbb{N}^d$, nên theo Bổ đề 1.1.7 $(iii) \Leftrightarrow (iv)$, ta có thể xây dựng một quan hệ trên tập hợp các